a)

Seien $w[i]$ die von Produkt i, $i = 1, 2$, produzierten Mengen. Dann ergeben sich folgende Restriktionen:

Maschinenstunden:	$3w[1] + 2w[2]$	$\leq$	1200
Rohstoffemge:	$5w[1] + 10w[2]$	$\leq$	3000
Arbeitsstunden:	$0w[1] + 0.5w[2]$	$\leq$	125

ferner muss natürlich gelten:

$$\begin{aligned} w[1] &\geq 0 \\ w[2] &\geq 0. \end{aligned}$$

Also entsteht die Menge $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \{(w[1], w[2]) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ | \\ 3w[1] + 2w[2] \leq 1200,\ 5w[1] + 10w[2] \leq 3000,\ w[2] \leq 250\}$$

Nach Konstruktion (Schnitt von Halbebenen!) ist $\mathcal{M}$ eine polyedrische Menge und in der Tat sogar ein konvexes Polyeder.

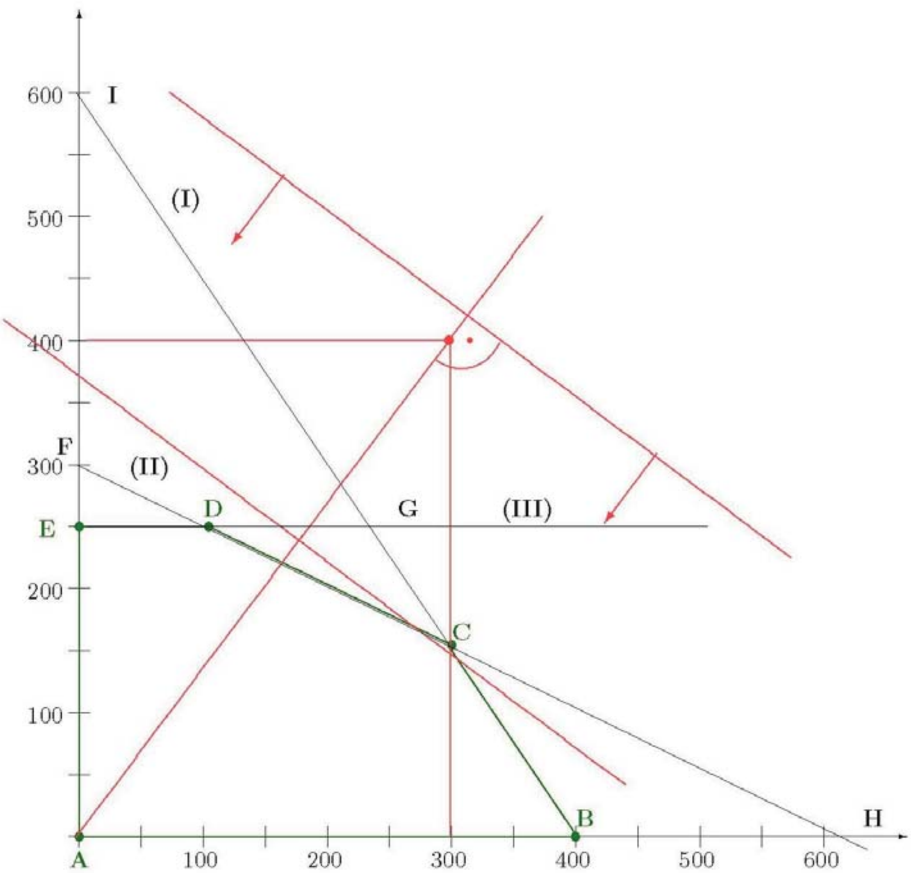
b)

- graphische Lösung: wegen Nichtnegativitätsbedingungen liegt die Lösung im ersten Quadranten
- Begrenzungsgeraden

$$\begin{aligned} 3w[1] + 2w[2] &= 1200 \quad (I) \\ 5w[1] + 10w[2] &= 3000 \quad (II) \\ w[2] &= 250 \quad (III) \end{aligned}$$

  durch 2 Punkte bestimmen, am leichtesten durch Schnitt mit den Achsen

- Dann noch „richtige Seite“ der Halbebene finden durch geeigneten Punkt, hier einfach, da $(0, 0)$ alle Restriktionen erfüllt.



$$\begin{array}{rr} (I) & 3w[1] + 2w[2] = 1200; \\ (II) & 5w[1] + 10w[2] = 3000; \\ (III) & w[2] = 250; \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} w[1] = 0 & \Rightarrow & w[2] = 600; & w[2] = 0 & \Rightarrow & w[1] = 400 \\ w[1] = 0 & \Rightarrow & w[2] = 300; & w[2] = 0 & \Rightarrow & w[1] = 600 \\ w[1] \leftarrow \text{beliebig} & & & & & \end{array}$$

c)

Das sind alle Punkte, für die es keinen Punkt gibt, der entweder echt oberhalb und mindestens so weit rechts oder weiter rechts und mindestens so hoch ist: Polygonzug DCB

d) Eckpunkte

Ein Eckpunkt entsteht aus

- dem Schnitt (mindestens) zweier (allgemein im $\mathbb{R}^k$ k) Begrenzungslinien
- und muss zur Menge gehören, also die „anderen Restriktionen " erfüllen.

Mit

$$\begin{array}{crcr} (I) & 3w[1] + 2w[2] & \leq & 1200 \\ (II) & 5w[1] + 10w[2] & \leq & 3000 \\ (III) & w[2] & \leq & 250 \\ (IV) & -w[1] & \leq & 0 \\ (V) & -w[2] & \leq & 0 \end{array}$$

ergeben sich $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3!} = 10$ Möglichkeiten

$$(I),(II) \left\{ \begin{array}{r} 3w[1] + 2w[2] = 1200 \\ 5w[1] + 10w[2] = 3000 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{r} -15w[1] - 10w[2] = -6000 \\ 5w[1] + 10w[2] = 3000 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 10w[1] = 3000 \\ w[1] = 300 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 10w[2] & = & 3000 - 5 \cdot 300 \\ \Longleftrightarrow w[2] & = & 150 \end{array}$$

erfüllt Restriktion $(III),(IV),(V) \Rightarrow$ Punkt C

Beispielsweise: Punkt G:

$$\begin{array}{lrcl} (I),(III) & 3w[1] + 2w[2] & = & 1200 \\ & w[2] & = & 250 \\ \Rightarrow & 3w[1] & = & 700 \quad \Leftrightarrow \quad w[1] = 233.3 \quad w[2] = 250, \end{array}$$

verletzt (II), denn $5 \cdot 233 + 10 \cdot 250 = 3665 > 3000$

e) Gewinnoptimaler Plan

$$\text{Maximiere } 3 \cdot w[1] + 4 \cdot w[2] \text{ in } (w[1], w[2]) \;:$$

$$\text{Schreibweise:} 3w[1] + 4w[2] \;\longrightarrow \max_{w[1],w[2]}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3w[1] + 2w[2] &\leq 1200 \\ 5w[1] + 10w[2] &\leq 3000 \\ 0.5w[2] &\leq 125 \\ w[1] &\geq 0 \\ w[2] &\geq 0 \end{aligned}$$

In der Tat handelt es sich um ein lineares Programm, sowohl die Zielfunktion als auch die Restriktionen sind linear in den zwei Variablen $w[1]$ und $w[2]$.

Zu f) Graphische Lösung

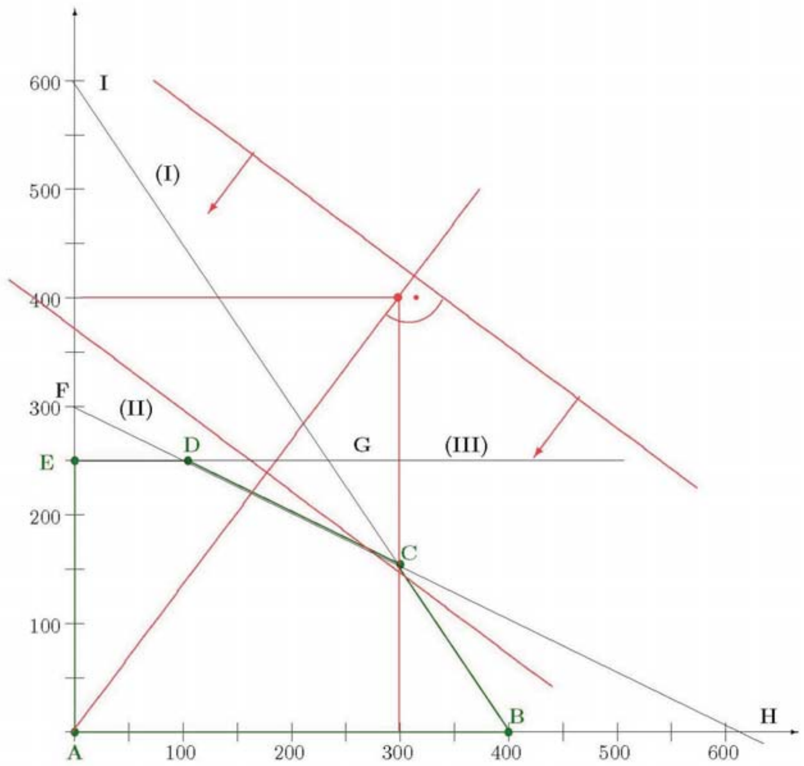
Grundlegende Idee zur graphischen Lösung von Optimierungsproblemen: Betrachte Höhenlinien, also Bereiche mit gleichem Wert der Zielfunktion suchen.

- Höhenlinie $a_1 w[1] + a_2 w[2] = c$
- Hyperebene mit Senkrechter $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Von oben nach unten schieben, bis sie zum ersten Mal berührt (in Ecke, oder an Kante)
-
  $$\text{Maximiere } 3 \cdot w[1] + 4 \cdot w[2] \text{ in } (w[1], w[2]) \;:$$

  $$3w[1] + 4w[2] \;\longrightarrow \max_{w[1],w[2]}$$

  unter den Nebenbedingungen

  $$\begin{aligned} 3w[1] + 2w[2] &\leq 1200 \\ 5w[1] + 10w[2] &\leq 3000 \\ 0.5w[2] &\leq 125 \\ w[1] &\geq 0 \\ w[2] &\geq 0 \end{aligned}$$



$c = 3 \cdot w[1] + 4 \cdot w[2]$
$c = 0 \Rightarrow w[1], w[2] = 0$; Punkte im Verhältnis $3 : 4$, z.B. $(300, 400)$
Senkrechte runterschieben: schneidet bei $C = (300, 150)$, also lautet die Optimallösung $w[1] = 300, w[2] = 150$.
Als optimaler Wert der Zielfunktion (maximaler Gewinn) ergibt sich $3 \cdot 300 + 4 \cdot 150 = 1500$

g) Zur Dualität

Das duale Standard-Minimum-Problem zu dem Standard-Maximum-Problem

$$3w[1] + 4w[2] \longrightarrow \max_w$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} 3w[1] + 2w[2] & \leq & 1200 \\ 5w[1] + 10w[2] & \leq & 3000 \\ 0 \cdot w[1] + 0.5 \cdot w[2] & \leq & 125 \\ w[1] & \geq & 0 \\ w[2] & \geq & 0 \end{array}$$

lautet

$$1200u[1] + 3000u[2] + 125u[3] \longrightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcll} 3u[1] + 5u[2] + 0 \cdot u[3] & \geq & 3 & \text{(I)} \\ 2u[1] + 10u[2] + 0.5u[3] & \geq & 4 & \text{(II)} \\ u[1] & \geq & 0 & \text{(III)} \\ u[2] & \geq & 0 & \text{(VI)} \\ u[3] & \geq & 0 & \text{(V)} \end{array}$$

Eine Lösungsmöglichkeitfür dieses Problem besteht daran, alle $\binom{5}{3}$ Extremalpunkte des die Restriktionen beschreibenden Polyeders zu bestimmen und die Zielfunktion dort auszuwerten. Man kann die Suche abkürzen, wenn man die Lösung des Primalproblems bereits kennt. Gemäß Prop. 1.44 ergibt sich ja für das Optimum der Zufallsfunktion des dualen Problems derselbe Wert. Die späteren Überlegungen zu Schattenpreisen und komplementärem Schlupf zeigen ferner, dass für das Optimum gelten muss: $u^*[3] = 0$. Startet man „glücklicherweise“ gleich mit dem Eckpunkt aus den Gleichungen (I), (II), (V), so erhält man

$$\begin{array}{lrcrcr} I: & 3u^*[1] & + & 5u[2] & = & 3 \\ II: & 2u^*[1] & + & 10u[2] & = & 4 \\ (-2) \cdot I: & -6u^*[1] & - & 10u[2] & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcr} (-2) \cdot I + II: & -4u^*[1] & = & -2 \\ & u^*[1] & = & \frac{1}{2} \\ & 10u^*[2] & = & 4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ & u^*[2] & = & \frac{3}{10} \end{array}$$

Dies liefert $u^*[1] = \frac{1}{2}, u^*[2] = \frac{3}{10}, u^*[3] = 0$, was einen Wert der Zielfunktion von $1200 \cdot \frac{1}{2} + 3000 \cdot \frac{3}{10} = 1500$ produziert. Da dies das Optimum darstellt (vgl. Primalproblem), ist $u^*[1] = \frac{1}{2}, u^*[2] = \frac{3}{10}, u^*[3] = 0$ eine Optimallösung.

h) Kanonische Form

Das Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form lautet:

$$\begin{array}{rcl} 3w[1] + 4w[2] & \longrightarrow & \max\limits_{w[1],w[2]} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & & \\ 3w[1] + 2w[2] + w_s[1] & = & 1200 \\ 5w[1] + 10w[2] + w_s[2] & = & 3000 \\ 0.5w[2] + w_s[3] & = & 125 \\ w[1] & \geq & 0 \\ w[2] & \geq & 0 \\ w_s[1] & \geq & 0 \\ w_s[2] & \geq & 0 \\ w_s[3] & \geq & 0. \end{array}$$

Für die Optimallösung ergibt sich gemäß oben:

$$w[1]^* = 300,\ w[2]^* = 150,$$

und damit

$$\begin{array}{rcl} w_s^*[1] & = & 1200 - 3 \cdot 300 - 2 \cdot 150 = 0 \\ w_s^*[2] & = & 3000 - 5 \cdot 300 - 10 \cdot 150 = 0 \\ w_s^*[3] & = & 125 - 0.5 \cdot 150 = 50 \end{array}$$

Man erkennt also, dass die dritte Restriktion an der Optimallösung nicht ausgeschöpft wird. Die Firma könnte also die verbleibende Arbeitskraft in anderen Bereichen einsetzen.

zu i) Satz vom komplimentären Schlupf

Für die Optimallösung des primalen-Problems gilt:

$$\begin{pmatrix} w[1]^* \\ w[2]^* \\ w_s^*[1] \\ w_s^*[2] \\ w_s^*[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Bringt man das duale Problem

$$1200u[1] + 3000u[2] + 125u[3] \;\rightarrow\; \min_{u[1],u[2],u[3]}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3u[1] + 5u[2] + 0 \cdot u[3] &\geq 3 \\ 2u[1] + 10u[2] + 0.5u[3] &\geq 4 \\ \\ u[1] &\geq 0 \\ u[2] &\geq 0 \\ u[3] &\geq 0 \end{aligned}$$

in die kanonische Form, so ergibt sich

$$1200u[1] + 3000u[2] + 125u[3] \longrightarrow \min_{u[1],u[2],u[3]}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3u[1] + 5u[2] + 0 \cdot u[3] - u_s[1] &= 3 \\ 2u[1] + 10u[2] + 0.5u[3] - u_s[2] &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u[1] &\geq 0 \\ u[2] &\geq 0 \\ u[3] &\geq 0 \\ u_s[1] &\geq 0 \\ u_s[2] &\geq 0 \end{aligned}$$

Mit den Optimallösungen $u[1]^* = \frac{1}{2}$, $u[2]^* = \frac{3}{10}$ und $u[3]^* = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0.5 + 10 \cdot \frac{3}{10} - u_s[1] &= 4 \\ \Longleftrightarrow u_s[1] &= 0 \\ 1.5 + 1.5 - u_s[2] &= 3 \\ \Longleftrightarrow u_s[2] &= 0, \end{aligned}$$

also $\begin{pmatrix} u[1]^* \\ u[2]^* \\ u[3]^* \\ u_s^*[1] \\ u_s^*[2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In der Tat ist damit (vgl. Proposition 1.41):

$$\begin{pmatrix} w[1]^* \\ w[2]^* \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} u_s[1] \\ u_s[2] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_s^*[1] \\ w_s^*[2] \\ w_s^*[3] \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} u[1]^* \\ u[2]^* \\ u[3]^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 350 \\ 150 \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$w_s'u = 0$ „klar“ bei Interpretation über Schattenpreise. Dort, wo bei der optimalen Aktion bei der Restriktion noch Spiel ist, ist der Schattenpreis 0. Da das duale Problem des dualen Problems wieder das primale Problem bildet, gilt die analoge Aussage für die Schattenpreise des dualen, also die Optimallösung des primalen Problems.